



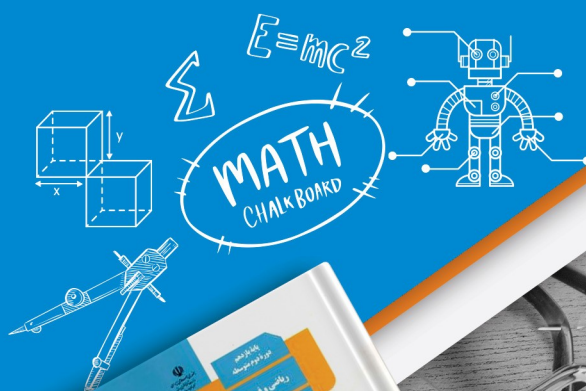
آزمون آزمایشی ۳ بهمن

دفترچه پاسخ تشریحی

ویژه پایه یازدهم

گروه آزمایشی علوم ریاضی

مرحله
۵



۱۴۰۴-۱۴۰۵

گزیده دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

تذکرات مهم ↓

➤ آزمون پیشرفت تحصیلی مرحله ۶ گزینه دو، در روز جمعه ۱۰ بهمن ۱۴۰۴ برگزار می گردد.

➤ دانش آموز گرامی، جهت استفاده از خدمات اختصاصی خود مانند کارنامه های هوشمند بعد از آزمون ارزشیابی، بانک سؤال گزینه دو، رفع اشکال هوشمند و...، با استفاده از شماره داوطلبی (به عنوان نام کاربری) و کد ملی خود (به عنوان رمز عبور) وارد وبسایت گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir شوید.

➤➤ در صورتی که اینترنتی ثبت نام کرده اید، رمز عبور شما همان رمزی است که خودتان انتخاب نموده اید.

➤ کارنامه های آزمون ارزشیابی پیشرفت تحصیلی مرحله ۵ به صورت کامل، با فاصله زمانی کوتاهی پس از آزمون مطابق اطلاعیه اعلام شده، بر روی پایگاه اینترنتی گزینه دو به آدرس www.gozine2.ir قرار می گیرد. در صورت بروز اشکال در دریافت کارنامه، موضوع را از طریق نمایندگی شهر خود پیگیری نمایید.



دانش آموز گرامی، شما می توانید با اسکن تصویر بالا به وسیله گوشی هوشمند و یا تبلت خود، به صفحه اینستاگرام مؤسسه گزینه دو وارد شوید.

[gozine2.ir](https://www.instagram.com/gozine2.ir)

مدیر واحد آموزش تخصصی: محمدرضا محمدهاشمی

معاون تولید محتوا: علی الفتی

کارشناسان		طراحان		گروه ریاضی
سید مهدی عابدی	سید علی موسوی راد	سید امیرمحمد سیدشاکری	علی فرمد	مسئول درس: علی افضل زاده دستیاران: عباس سعیدی - وحید جعفری
علی صادقی	مانی خداپنده	سعید اکبرزاده	فرهاد فرزانی	مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: هادی کاظم نژاد
حسین خواجوند	مانی خداپنده	امیدرضا پورحسینی		مسئول درس: سعید اکبرزاده دستیار: فرهاد فرزانی
پوپک مقدم		محمد خانگلدی		مسئول درس: ایمان اردستانی دستیاران: وحید جعفری - مهدی پوررضایی
امیرحسین حریری	ایمان حسین زاده	علیرضا صحرایی	عباس مالکی	مسئول درس: حسین افسری دستیاران: مهدی پوررضایی - عباس مالکی
کارشناسان		طراحان		گروه علوم
علی جوهری	میلاد حاتمی	منصوره رئیس دانا	سعید خورشیدی نسب	مسئول درس: بتول خواجه پور
نرگس حسینی		جواد ابادرلو	رضا بهنامی	مسئول درس: منصور داودوندی دستیار: ساناز دریکوندی
مریم گلی حسن لو		یوسف صباغی	محسن داودی	مسئول درس: سید حامد میرقادری دستیار: حسین سعادت
محمد احمدی		محمد علی توسلی فر	یاسر راش	مسئول درس: شکبیا کریمی
فرزانه صاعدی	حسن علی محمدی	فرزانه رجایی	عباس روزبهانی	
روزبه اسحاقیان				
کارشناسان		طراحان		گروه انسانی
محمدصادق حسام زاده	محمدصدرا حسینی	مینا پژنگ	هادی قورزایی	مسئول درس: محمدرضا پیرو دستیار: سپهر سالار کیا
علیرضا حیدری		محمدحسین صفایی	محمدرضا پیرو	مسئول درس: الهام رضایی دستیار: فاطمه صفری
مehتاب شیرازی	هستی ناصح	علیرضا مختاری	الهام میرزایی	مسئول درس: سیده ضحی سکاکی دستیار: ثنا کاشیان
علی شگری	فاطمه یاری	نگین تربیتی	مهدی پارچه باف دولتی	مسئولین درس: پویا رضاداد محمدحسین حقیقت
فاطمه نظری	سارا حمزه	ولی برجی	سید محسن ماهینی	مسئول درس: سیده ساره زاهدی
مehتاب شیرازی	صبا پهلوان	حمیدرضا قائد امینی	جواهر فرحات	مسئول درس: الاز گنج کار دستیار: الهه ریاحی نسب
مehتاب شیرازی		آریا ذوقی	امینه کارآمد	مسئول درس: سعید رحیمیان دستیاران: محمدحسین خدام - فراز مختاری نژاد
مehتاب شیرازی		مهسا اصغری	فاطمه نیتی	مسئول درس: امیر محمدبیگی دستیار: محمدرضا مبارکی
مehتاب شیرازی		سیده ساره زاهدی	محسن سلیمانی	
ابوالفضل میرمحمدی	سپهر علی پور	فاطمه شریف زاده	محمدحسین خدام	
امیررضا علیرزاده		محسن انصاری		
کوثر رعدی		میترا چینی ساز	آیدانا رستمی	
		طاهره کریمی	محمدرضا مبارکی	
		علی محسنی	آرش بدری	

گروه ریاضی
مسئولین: سید شاکری
معاونین: علی الفتی

گروه علوم
مسئولین: محمد حسین کشانی
معاونین: علی الفتی

گروه انسانی
مسئولین: اکبر آخوندی
معاونین: علی الفتی

ریاضیات



۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

خوبه اینو بدونی



اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود، تابع وارون پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد، آن را یک به یک می نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است، هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

جوابش اینه



گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه ۱: این رابطه یک تابع است ولی یک به یک نیست؛ زیرا در یک مدرسه، افراد مختلفی شماره لیست کلاسی یکسانی دارند. مثلاً در هر کلاس از این مدرسه، شخصی با شماره یک در لیست کلاس حضور دارد.

گزینه ۲: این رابطه یک تابع یک به یک است. به ازای هر مقدار شعاع، دقیقاً یک مقدار مساحت وجود دارد. (تابع بودن) همچنین به ازای هر مقدار مساحت، دقیقاً یک مقدار شعاع وجود دارد. (یک به یک بودن)

گزینه ۳: این رابطه یک تابع نیست؛ زیرا به ازای هر عدد مثبت مانند a به عنوان طول مستطیل، بی شمار مستطیل با مساحت های مختلف می توان رسم کرد.

گزینه ۴: این رابطه یک تابع است ولی یک به یک نیست؛ به عنوان مثال، تعداد زیادی افراد دارای ۲ پسر در ایران زندگی می کنند.

۲- پاسخ: گزینه ۱

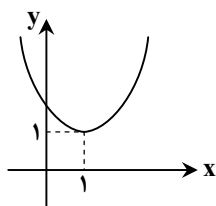
▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

خوبه اینو بدونی



یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

جوابش اینه

نمودار تابع f را رسم می کنیم. برای این منظور می توان نوشت:

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = (x-1)^2 + 1$$

اگر تابع f با دامنه $D_f = (-\infty, a]$ یک به یک باشد، لازم است a مقداری کوچک تر یا مساوی ۱ داشته باشد. در این صورت هر خط افقی، حداکثر در ۱ نقطه نمودار را قطع می کند.

۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

خوبه اینو بدونی

اگر f و g دو تابع باشند، اعمال بین توابع به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

جوابش اینه

ضابطه هریک از توابع f و g را می یابیم.تابع f : خطی با شیب ۱ و عرض از مبدأ ۱ است:

$$f(x) = x + 1$$

تابع g : خطی با شیب $-\frac{3}{4}$ و عرض از مبدأ ۳ است:

$$g(x) = -\frac{3}{4}x + 3$$

در نتیجه ضابطه $f - 2g$ عبارت است از:

$$f(x) - 2g(x) = (x+1) - 2\left(-\frac{3}{4}x + 3\right) = x+1 + \frac{3}{2}x - 6 = \frac{5}{2}x - 5$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

۴- پاسخ: گزینه ۱



اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با $g \circ f$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ به شرط آن که مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند:

اگر دامنه تابع f را با D_f و دامنه تابع g را با D_g نمایش دهیم، دامنه تابع $g \circ f$ برابر است با:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$



برای یافتن تابع $g \circ f$ ابتدا دامنه آن را مشخص می‌کنیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{-1, 2\}$$

دقت کنید که عدد صفر عضو D_f است ولی عضو $D_{g \circ f}$ نیست؛ زیرا:

$$f(0) = 4, 4 \notin D_g$$

حال تابع $g \circ f$ را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l} -1 \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{2} \boxed{g} \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{2} \boxed{g} \longrightarrow 2 \end{array}$$

بنابراین:

$$g \circ f = \{(-1, 2), (2, 2)\}$$

$$R_{g \circ f} = \{2\}$$

در نتیجه برد تابع $g \circ f$ عبارت است از:

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

۵- پاسخ: گزینه ۳



اگر f و g دو تابع باشند، تقسیم دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$



ابتدا دامنه هریک از توابع f و g را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f : 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

برای تابع $\frac{f}{g}$ لازم است $g \neq 0$ باشد. برای این منظور g را برابر با صفر قرار می‌دهیم تا مقادیر نامطلوب به دست آید:

$$|x+2|-1=0 \Rightarrow |x+2|=1 \Rightarrow \begin{cases} x+2=1 \Rightarrow x=-1 \\ x+2=-1 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

در نتیجه دامنه $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$D_{\frac{f}{g}} = [-2, 2] - \{-3, -1\} = [-2, 2] - \{-1\} = [-2, -1) \cup (-1, 2]$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۱)

۶- پاسخ: گزینه ۱



مجموع جملات دنباله هندسی a_n با قدرنسبت q و جمله اول a_1 برابر است با:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

اگر $a, b, c, 3$ جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه $b = \frac{a+c}{2}$ است. b را «واسطه حسابی» a و c می‌نامیم.



اعداد $a^2 - 1$ ، $a^2 + 1$ و $(a+1)^2$ به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی هستند؛ پس:

$$(a^2 - 1) + (a^2 + 1) = 2(a+1)^2 \Rightarrow 2a^2 = 2a^2 + 4a + 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

بنابراین در دنباله هندسی مورد نظر، جمله اول 2 و قدرنسبت $a = -\frac{1}{2}$ می باشد؛ در نتیجه مجموع 6 جمله اول برابر است با:

$$S_6 = \frac{2(1 - (-\frac{1}{2})^6)}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2(1 - \frac{1}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{62}{64}}{\frac{3}{2}} = \frac{62}{96} = \frac{31}{48}$$

۷- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)



در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه ها S و ضرب ریشه ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S = -\frac{b}{a}, P = \frac{c}{a}$$

برای هر تابع f جواب های معادله $f(x) = 0$ را $f(x)$ (در صورت وجود) «صفرهای تابع f» می نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع آن مقادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آن ها $f(x)$ برابر صفر می شود.



از آنجا که $x = -2$ ، یکی از صفرهای تابع f است، می توان نوشت:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 4k + 18 - 6 = 0 \Rightarrow k = \frac{-4}{4} = -1$$

از آنجا که $f(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر است، با تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ ، عامل دیگر $f(x)$ را می یابیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 9x - 6 & x+2 \\ \hline -(x^3 + 2x^2) & \\ \hline -3x^2 - 9x - 6 & \\ -(-3x^2 - 6x) & \\ \hline -3x - 6 & \\ -(-3x - 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

بنابراین اعداد a و b، صفرهای $q(x) = x^2 - 3x - 3$ هستند. اگر $S = a + b$ و $P = ab$ باشد، می توان نوشت:

$$S = \frac{-(-3)}{1} = 3, P = \frac{-3}{1} = -3$$

از طرفی:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = S^2 - 2P = 9 + 6 = 15$$

بنابراین $a^2 + b^2 = 15$ می باشد.

۸- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۳)



برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده، معادله را حل می کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند، زیرا کسر تعریف نشده می شود. همچنین ممکن است برخی از جواب ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب ها نیز مورد قبول نیستند.



اگر اندازه سرعت جریان آب را v در نظر بگیریم، سرعت حرکت کشتی در جهت مسیر جریان آب، $8+v$ و در خلاف مسیر جریان آب $8-v$ است؛ در نتیجه بنابر رابطه « $\frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{سرعت}} = \text{زمان}$ »، مدت زمان مسیر رفت برابر با $\frac{12}{8+v}$ و مدت زمان مسیر برگشت برابر با $\frac{12}{8-v}$ است؛ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{12}{8+v} + \frac{12}{8-v} = 4 \Rightarrow \frac{3}{8+v} + \frac{3}{8-v} = 1$$

ک.م.م. مخرج کسرها یعنی $(8+v)(8-v)$ را در طرفین تساوی ضرب می‌کنیم:

$$3(8-v) + 3(8+v) = (8+v)(8-v) \Rightarrow 24 - 3v + 24 + 3v = 64 - v^2 \Rightarrow v^2 = 40 \xrightarrow{v>0} v = 4$$

بنابراین سرعت جریان آب ۴ کیلومتر بر ساعت می‌باشد.

۹- پاسخ: گزینه ۳ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۴)**



$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

- اگر a عددی حقیقی باشد، قدرمطلق a طبق تعریف برابر است با:



برای حل این معادله، لازم است عبارت درون هریک از قدرمطلق‌ها را تعیین علامت کنیم تا بتوانیم معادله را بدون قدرمطلق بازنویسی کنیم. ابتدا توجه کنید که عبارت $x^2 + x + 1$ ، همواره مثبت است؛ زیرا دلتای آن منفی و ضریب x^2 در آن مثبت است؛ در نتیجه:

$$|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1 \quad \text{اما عبارت } x^2 - 3x - 4 \text{ دو ریشه دارد:}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 4$$

در نتیجه جدول تعیین علامت آن به صورت مقابل است:

x	-1	4
$x^2 - 3x - 4$	$+$	$-$

بنابراین معادله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

$$(قابل قبول) \quad x^2 - 3x - 4 = x^2 + x + 1 + 3 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2 \quad \text{یا } x \leq -1: x^2 - 3x - 4 = x^2 + x + 1 + 3 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2$$

$$(حالت دوم) \quad -1 < x < 4: -x^2 + 3x + 4 = x^2 + x + 1 + 3 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ (قابل قبول)} \text{ یا } x = 1 \text{ (قابل قبول)}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$-2 + 0 + 1 = -1$$

۱۰- پاسخ: گزینه ۴ **▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۱)**



- دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$ یعنی ضابطه‌های برابر داشته باشند.



از آنجا که $(1, a) \in f$ و $(1, 2b) \in g$ ، نتیجه می‌شود: $a = 2b$

از آنجا که $(2, a^2) \in f$ و $(2, a^2 + b + 1) \in g$ ، نتیجه می‌شود:

در نتیجه طبق رابطه اول نتیجه می‌شود:

بنابراین تابع f بدین شکل درمی‌آید:

از آنجا که f یک تابع است، ورودی ۲ نباید دو خروجی مختلف تولید کند. در نتیجه:

$$a^2 + b + 1 = a^2 \Rightarrow b = -1$$

$$a = 2b = -2$$

$$f = \{(1, -2), (2, 4), (2, c)\}$$

$$c = 4$$

۱۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)



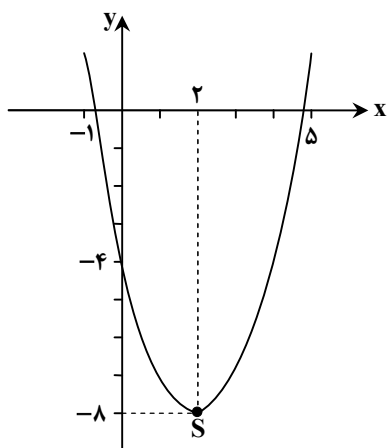
- برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.



توجه کنید $y = x^2 - 4x - 4$ یک سهمی است که مختصات رأس آن چنین است:

$$x_S = \frac{-(-4)}{2} = 2 \Rightarrow y_S = 4 - 8 - 4 = -8$$

بنابراین نمودار این سهمی به صورت زیر است:



از آنجا که دامنه به بازه $D_f = (-\infty, 2]$ محدود شده است، فقط شاخه سمت چپ سهمی باقی می ماند و تابع در این وضعیت، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است.

همچنین برد تابع چنین است:

$$R_f = [-8, +\infty)$$

برای به دست آوردن ضابطه وارون تابع، لازم است x را بر حسب y به دست آوریم:

$$y = x^2 - 4x - 4 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 8 \Rightarrow (x-2)^2 = y+8 \xrightarrow[D_f=(-\infty, 2]]{x \leq 2} x-2 = -\sqrt{y+8} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y+8}$$

حال جای x و y را عوض می کنیم تا f^{-1} حاصل شود:

$$y = 2 - \sqrt{x+8} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+8}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

در ضمن نتیجه می شود:

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-8, +\infty)$$

$$R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 2]$$

۱۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)



- برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

- اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع وارون پذیر f باشد، آنگاه نقطه (b, a) روی وارون تابع (f^{-1}) قرار دارد و برعکس.

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$



تابع f را بدون در نظر گرفتن محدودیت دامنه، به صورت دوضابطه ای بازنویسی می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)+1 = -x-1 & x \geq -2 \\ -(-(x+2))+1 = x+3 & x < -2 \end{cases}$$

با توجه به دامنه محدود شده یعنی $D_f = [0, +\infty)$ ، ضابطه f چنین است:

$$y = f(x) = -x - 1$$

برای یافتن ضابطه f^{-1} ، لازم است x را بر حسب y بنویسیم:

$$y = -x - 1 \Rightarrow x = -y - 1$$

حال جای x و y را عوض می‌کنیم:

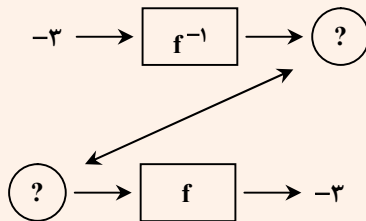
$$y = -x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x - 1$$

در نتیجه:

$$f^{-1}(-3) = -(-3) - 1 = 2$$



یافتن مقدار $f^{-1}(-3)$ ، معادل این است که $f(x)$ را برابر با -3 قرار دهیم تا مشخص شود مقدار x کدام است:



در نتیجه کافی است جواب این معادله را بیابیم:

$$-|x+2|+1=-3 \Rightarrow |x+2|=4 \Rightarrow x+2=\pm 4 \Rightarrow x=-6 \text{ یا } x=2$$

از آنجاکه دامنه تابع f به صورت $x \geq 0$ است، جواب مورد قبول $x=2$ می‌باشد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

۱۳- پاسخ: گزینه ۳



- دامنه تابع gof ، برابر است با:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$



ابتدا دامنه هریک از توابع f و g را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$D_f : 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_f = [-3, 3]$$

$$D_g : 4x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

حال دو شرط موردنظر در دامنه D_{gof} را در نظر می‌گیریم:

$$\text{شرط اول} : x \in D_f \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$\text{شرط دوم} : f(x) \in D_g \Rightarrow f(x) \neq 1 \Rightarrow \sqrt{9-x^2} \neq 1 \Rightarrow 9-x^2 \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 8 \Rightarrow x \neq 2\sqrt{2}, x \neq -2\sqrt{2}$$

در نتیجه دامنه تابع gof ، چنین است:

$$D_{\text{gof}} = [-3, 3] - \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: استدلال * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۳)

۱۴- پاسخ: گزینه ۱



حاصل جمع دو عبارت نامنفی برابر با صفر شده است؛ بنابراین لازم است هر دو عبارت هم‌زمان صفر باشند:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 & (1) \\ ax^2 + (1+a)x - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

طبق فرض دو معادله (۱) و (۲) باید دقیقاً یک جواب مشترک داشته باشند. معادله (۱) درجه ۳ است ولی با کمی دقت مشخص می شود که $x=1$ یکی از صفرهای آن است. بنابراین می توان آن را بر $x-1$ تقسیم کرد و از این طریق به ریشه های دیگر در صورت وجود، دست یافت:

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x^3-3x^2-x+3 \\ \hline & x^2-2x-3 \\ \hline & -2x^2-x+3 \\ \hline & -(-2x^2+2x) \\ \hline & -3x+3 \\ \hline & -(-3x+3) \\ \hline & 0 \end{array}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$x^3-3x^2-x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x^2-2x-3)=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-3)=0$$

در نتیجه ریشه های این عبارت اعداد ۱، -۱ و ۳ هستند. حال سه حالت ممکن برای وجود ریشه مشترک در معادلات (۱) و (۲) را با جای گذاری در (۲) بررسی می کنیم:

$$\text{ریشه مشترک } x=1 : \text{ حالت اول} \Rightarrow a+(1+a)-3=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$$

در این حالت معادله (۲) به صورت مقابل درمی آید:

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-3$$

بنابراین فقط $x=1$ ریشه مشترک است و مقدار $a=1$ مورد قبول است.

$$\text{غیر قابل قبول } -4=0 \Rightarrow a-(1+a)-3=0 \Rightarrow \text{ریشه مشترک } x=-1 : \text{ حالت دوم}$$

$$\Rightarrow 9a+3(1+a)-3=0 \Rightarrow 12a=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \text{ریشه مشترک } x=3 : \text{ حالت سوم}$$

در این حالت معادله (۲) به صورت مقابل درمی آید:

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

بنابراین فقط $x=3$ ریشه مشترک است و مقدار $a=0$ نیز مورد قبول است.

در نتیجه مجموع مقادیر ممکن برای a برابر با $1+0=1$ می باشد.

۱۵- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: استدلال * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)



- به طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- اگر خطوط d_1 و d_2 به ترتیب با شیب های m_1 و m_2 بر هم عمود باشند، آنگاه $m_1 m_2 = -1$ و برعکس.

- اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad - \text{فاصله نقطه } A(x_0, y_0) \text{ از خط } ax + by + c = 0 \text{ برابر است با:}$$



ابتدا لازم است مقدار a را محاسبه کنیم. می دانیم در مثلث قائم الزاویه رابطه فیثاغورس برقرار است:

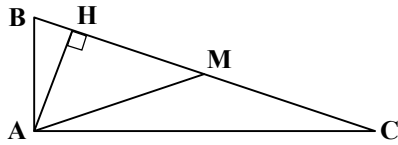
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow ((a+1-a+1)^2 + (3-0)^2) + ((a-7-a+1)^2 + (a+3-0)^2) = (a-7-a-1)^2 + (a+3-3)^2$$

$$\Rightarrow 4+9+36+(a+3)^2 = 64+a^2 \Rightarrow 49+a^2+6a+9 = 64+a^2 \Rightarrow 6a=6 \Rightarrow a=1$$

همچنین می توان مقدار a را با توجه به عمود بودن پاره خط AB بر AC به دست آورد. یعنی می دانیم شیب AB و AC ، قرینه و معکوس یکدیگرند؛ پس:

$$\underbrace{\frac{3-0}{(a+1)-(a-1)}}_{\text{شیب } AB} \times \underbrace{\frac{a+3-0}{(a-7)-(a-1)}}_{\text{شیب } AC} = -1 \Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{a+3}{-6} = -1 \Rightarrow 2a+9=12 \Rightarrow 2a=3 \Rightarrow a=1$$

با توجه به شکل مقابل، اندازه پاره خط MH مورد نظر است.



نقاط $A(0,0)$ ، $B(2,3)$ و $C(-6,4)$ رؤس مثلث هستند. اندازه MH همان فاصله نقطه M از خط AH است. مختصات M عبارت است از:

$$M = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(-2, \frac{7}{2} \right)$$

اکنون معادله خط AH را می‌یابیم. خط AH از نقطه $A(0,0)$ می‌گذرد و شیب آن قرینه معکوس شیب BC است:

$$\text{شیب BC} = \frac{4-3}{-6-2} \Rightarrow \text{شیب AH} = 8 \Rightarrow \text{معادله AH: } y = 8x + b \xrightarrow{\text{جای گذاری A}} b = 0$$

$$\text{معادله AH: } y = 8x \Rightarrow \text{معادله AH: } 8x - y = 0$$

اکنون طبق رابطه فاصله نقطه از خط، اندازه MH را به دست می‌آوریم:

$$|MH| = \frac{8(-2) - \frac{7}{2}}{\sqrt{8^2 + (-1)^2}} = \frac{-16 - \frac{7}{2}}{\sqrt{65}} = \frac{-39}{2\sqrt{65}} \times \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{65}} = \frac{-39\sqrt{65}}{130} = \frac{3\sqrt{65}}{10} = 0.3\sqrt{65}$$

بنابراین فاصله پای میانه از پای ارتفاع، 0.3 برابر $\sqrt{65}$ است.

۱۶- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: استدلال * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۲)



$$[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

- برای هر عدد حقیقی x داریم:



$$[x^2 - 3x + 2] - x = 23 \Rightarrow x = [x^2 - 3x + 2] - 23$$

ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

توجه کنید که $[x^2 - 3x + 2]$ عددی صحیح و ۲۳ هم عددی صحیح است؛ در نتیجه تفاضل آن‌ها هم عددی صحیح خواهد بود؛ بنابراین x

عددی صحیح است. بنابراین $x^2 - 3x + 2$ هم عددی صحیح است و می‌توان آن را از جزء صحیح بیرون آورد، پس معادله را به این صورت

$$x = x^2 - 3x + 2 - 23$$

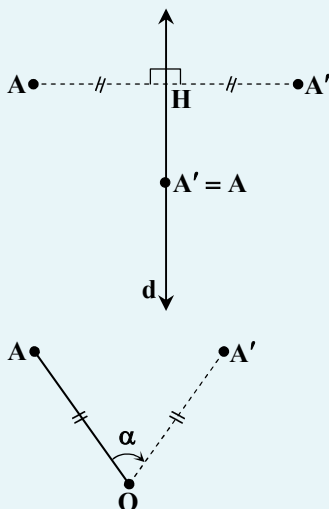
بازنویسی می‌کنیم:

حال به حل معادله می‌پردازیم و در انتها جواب‌های صحیح برای x را می‌پذیریم:

$$x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-7) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ یا } x = 7$$

بنابراین هر دو جواب قابل قبول و مجموع جواب‌ها برابر با ۴ می‌باشد.

۱۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)



- برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d، کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا A' به دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$S(A) = A'$$

- در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.

خط d، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می‌شود.

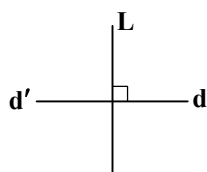
اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.

- دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم:

$$OA = OA' \text{ و } \widehat{AOA'} = \alpha$$



گزینه ۲: اگر خط d بر محور بازتاب L عمود باشد، تصویر آن تحت بازتاب نسبت به خط L خود خط d است، پس شیب خط تغییر نمی کند.

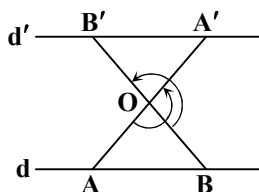


گزینه ۴: اگر خط d با محور بازتاب L موازی باشد، تصویر آن تحت بازتاب نسبت به خط L خطی موازی با L و در نتیجه موازی با d است. پس شیب خط تغییر نمی کند.

d _____
 L _____
 d' _____

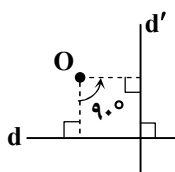
$$d \parallel d'$$

گزینه ۱: دوران یافته خطی به مرکز O و زاویه 180° ، خطی موازی با آن خط است. پس شیب خط تغییر نمی کند.



$$d \parallel d'$$

گزینه ۳: دوران یافته خطی به مرکز O و زاویه 90° ، خطی عمود بر آن خط است. پس شیب خط تغییر می کند.

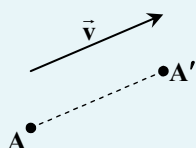


▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۱۸- پاسخ: گزینه ۱



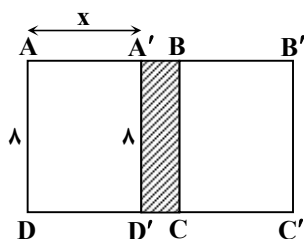
- انتقال T تحت بردار \vec{v} ، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P ، نقطه ای مانند A' در همان صفحه است که $\overline{AA'} = \vec{v}$



اگر اندازه بردار \vec{v} برابر x باشد، طبق شکل مقابل، داریم:

$$S_{A'BCD'} = A'B \times A'D' \Rightarrow 16 = A'B \times 8 \Rightarrow A'B = 2$$

$$\Rightarrow x = AA' = AB - A'B \Rightarrow x = 8 - 2 = 6$$



▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۱۹- پاسخ: گزینه ۲



- اگر O نقطه ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را متجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوئیم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند.

$$OM' = |k| \cdot OM \quad (\text{ب})$$

- اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

$$k = 2 \quad \begin{array}{c} \bullet \\ O \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ M \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ M' \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{مثال: } OM' = 2OM \end{array}$$

$$k = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ O \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ M' \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ M \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{مثال: } OM' = \frac{1}{2}OM \end{array}$$

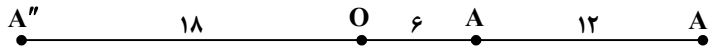
$$k = -2 \quad \begin{array}{c} \bullet \\ M' \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ O \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ M \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{مثال: } OM' = 2OM \end{array}$$

$$OM' = \frac{1}{2}OM \quad (\text{پ})$$

$$OM' = 2OM \quad (\text{پ})$$



با توجه به نکته و مفروضات سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



$$OA' = 3OA = 3 \times 6 = 18 \Rightarrow AA' = 12$$

$$AA'' = 2AA' = 2 \times 12 = 24 \Rightarrow OA'' = 18$$

خواسته سؤال برابر است با:

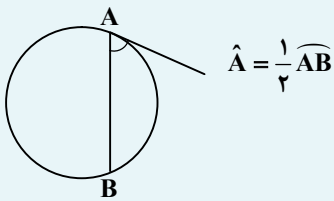
$$\frac{A'A''}{AA'} = \frac{12 + 6 + 18}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۱)

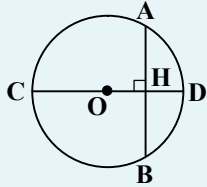
۲۰- پاسخ: گزینه ۳



- اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه.



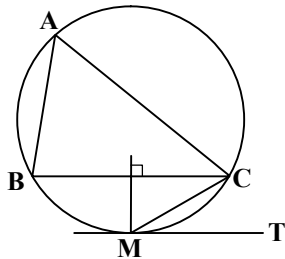
- اگر CD قطری از دایره باشد که بر وتر AB عمود است، آنگاه قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.



$$CD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{cases}$$



ابتدا زاویه \hat{A} را محاسبه می‌کنیم:



$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \widehat{BC} \Rightarrow 80^\circ = \frac{1}{2} \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BC} = 160^\circ$$

می‌دانیم عمودمنصف BC، کمان متناظر آن یعنی کمان BC را نصف می‌کند، پس:

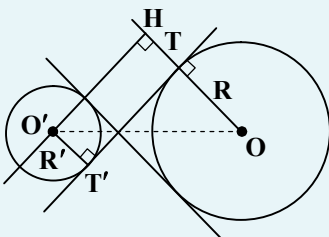
$$\widehat{CM} = \frac{1}{2} \widehat{BC} = \frac{1}{2} \times 160^\circ = 80^\circ$$

$$\widehat{CMT} = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$$

زاویه CMT ظلی است، پس:

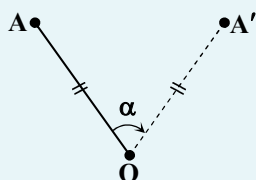
▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

۲۱- پاسخ: گزینه ۱



- در دو دایره متخارج، دو مماس مشترک داخلی و خط‌المركزین در یک نقطه هم‌مرس هستند و اندازه مماس مشترک داخلی از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$



- دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم:

$$OA = OA' \text{ و } \widehat{AOA'} = \alpha$$

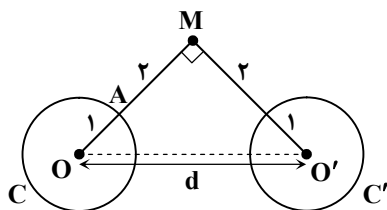


با توجه به شکل مقابل، مثلث OMO' قائم الزاویه است و اندازه خط‌المركزین برابر است با:

$$d = OO' = OM\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره C و C' برابر است با:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (1+1)^2} = \sqrt{18-4} = \sqrt{14}$$

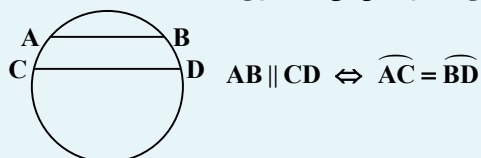


▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۱)

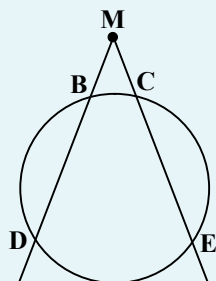
۲۲- پاسخ: گزینه ۲



- دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.

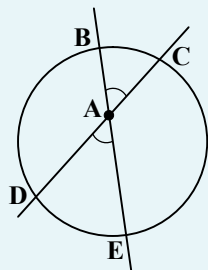


- زاویه‌ای که از برخورد امتدادهای دو وتر در خارج دایره تشکیل می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$$

- زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره تشکیل می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\widehat{DAE} = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$



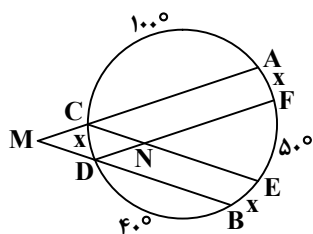
با توجه به اینکه کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند، داریم:

$$\begin{cases} AC \parallel DF \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{CD} \\ BD \parallel CE \Rightarrow \widehat{CD} = \widehat{EB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{CD} = \widehat{EB} = x$$

مجموع کل کمان‌های یک دایره برابر 360° است، پس:

$$\begin{aligned} 100^\circ + x + 50^\circ + x + 40^\circ + x &= 360^\circ \\ \Rightarrow 3x + 190^\circ &= 360^\circ \Rightarrow 3x = 170^\circ \Rightarrow x = \frac{170^\circ}{3} \end{aligned}$$

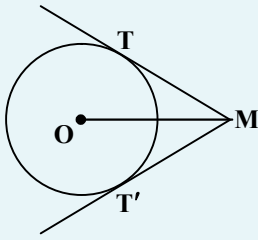
خواسته سؤال برابر است با:



$$\begin{aligned} \frac{\widehat{CNF}}{\widehat{M}} &= \frac{\frac{1}{2}(\widehat{CAF} + \widehat{EBD})}{\frac{1}{2}(\widehat{AFEB} - \widehat{CD})} = \frac{100^\circ + x + x + 40^\circ}{2x + 50^\circ - x} = \frac{2x + 140^\circ}{x + 50^\circ} = \frac{\frac{2 \times 170^\circ}{3} + 140^\circ}{\frac{170^\circ}{3} + 50^\circ} \\ \Rightarrow \frac{\widehat{CNF}}{\widehat{M}} &= \frac{340^\circ + 420^\circ}{170^\circ + 150^\circ} = \frac{760^\circ}{320^\circ} = \frac{76}{32} = \frac{19}{8} \end{aligned}$$



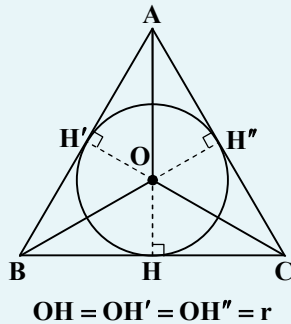
– هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O, r)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند،
آنگاه:



الف) اندازه‌های دو مماس برابرند. $MT = MT'$

ب) نیم‌خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

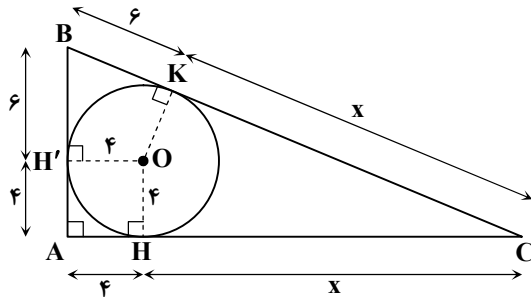
– سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث هم‌رس‌اند. این نقطه از هر سه ضلع
مثلث به یک فاصله است.



پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه هم‌رسی سه نیمساز است و شعاع این دایره که آن را با r
نشان می‌دهیم فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است.
در مثلث نیز $S = Pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.



شکل مقابل را در نظر بگیرید. چهارضلعی $OHAH'$ مربع به ضلع
۴ است. چون $AB = 10$ است، داریم:



$$BH' = AB - AH' = 10 - 4 = 6$$

$$BK = BH' = 6$$

فرض می‌کنیم $CH = CK = x$ ، با استفاده از فیثاغورس داریم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 10^2 + (4+x)^2 = (6+x)^2$$

$$\Rightarrow 100 + 16 + 8x + x^2 = 36 + 12x + x^2$$

$$\Rightarrow 116 - 36 = 12x - 8x$$

$$\Rightarrow 4x = 80 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow BC = 6 + 20 = 26$$

در مثلث قائم‌الزاویه، شعاع دایره محیطی برابر با نصف وتر است، پس:

$$R = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 26 = 13$$

شعاع دایره محیطی



با استفاده از نکته بالا، داریم:

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 10 \times (4+x) = 5(4+x)$$

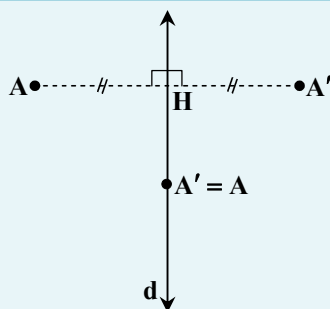
$$P = \frac{10 + 4 + x + 6 + x}{2} = \frac{20 + 2x}{2} = 10 + x$$

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow 4 = \frac{5(4+x)}{10+x} \Rightarrow 40 + 4x = 20 + 5x \Rightarrow x = 20$$

ادامه راه‌حل مانند راه‌حل اول است.

۲۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: استدلال * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

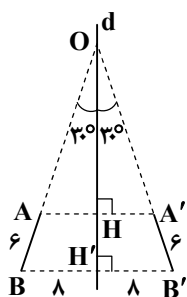


- برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d، کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می دهیم تا A' به دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می نامیم و می نویسیم: $S(A) = A'$

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.

خط d، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می شود.

اگر نقطه ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می شود؛ به عبارتی A' همان A است.



A'B' بازتاب AB نسبت به خط d را رسم می کنیم. با توجه به شکل و مفروضات سؤال و اینکه در مثلث قائم الزاویه، ضلع مقابل به زاویه ۳۰°، نصف وتر است، داریم:

$$\triangle OAH : \hat{O} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{1}{2}OA \Rightarrow OA = 2AH \quad (1)$$

$$\triangle OBH' : \hat{O} = 30^\circ \Rightarrow BH' = \frac{1}{2}OB \Rightarrow 8 = \frac{1}{2}OB \Rightarrow OB = 16$$

$$\Rightarrow OA + 6 = 16 \Rightarrow OA = 10 \xrightarrow{(1)} 10 = 2AH \Rightarrow AH = 5$$

$$\Rightarrow AA' = 2AH = 2 \times 5 \Rightarrow AA' = 10$$

$$\triangle OAH : \cos 30^\circ = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH}{10} \Rightarrow OH = 5\sqrt{3}$$

$$\triangle OBH' : \cos 30^\circ = \frac{OH'}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{OH'}{16} \Rightarrow OH' = 8\sqrt{3}$$

$$HH' = OH' - OH = 8\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$S_{AA'B'B} = \frac{(AA' + BB') \times HH'}{2} = \frac{(10 + 16) \times 3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{AA'B'B} = 39\sqrt{3}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: استدلال * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۳)

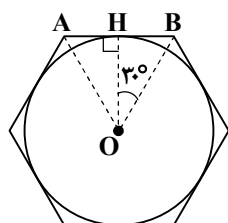
۲۵- پاسخ: گزینه ۴



- هر n ضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است.



در شکل مقابل شش ضلعی منتظم محیط بر دایره به شعاع r رسم شده است. اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم را a فرض کنیم، داریم:



$$S = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \Rightarrow 3a^2 = 24 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

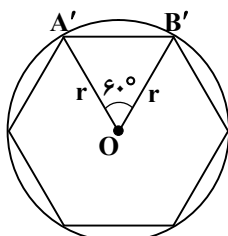
$$\tan 30^\circ = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$$

حال شش ضلعی منتظم محاط در دایره را در نظر می گیریم.

مثلث OA'B' متساوی الاضلاع به ضلع $A'B' = a' = r = \sqrt{6}$ است، پس داریم:

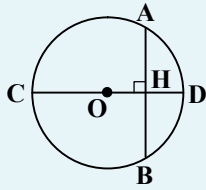
$$S_{OA'B'} = \frac{a'^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$مساحت شش ضلعی منتظم محاطی = 6S_{OA'B'} = 6 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$



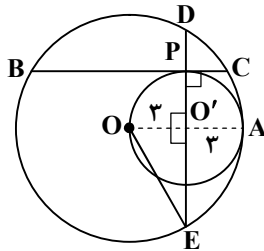
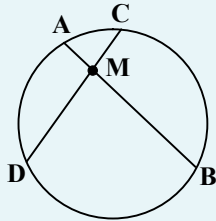


اگر CD قطری از دایره باشد که بر وتر AB عمود است، آنگاه قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.



$$CD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{cases}$$

هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع کنند. آنگاه $MA \cdot MB = MC \cdot MD$



با توجه به اینکه شعاع دایره بزرگ دو برابر شعاع دایره کوچک است و دو دایره مماس داخل هستند، دایره کوچک از مرکز دایره بزرگ‌تر عبور می‌کند. O' را به P وصل کرده و از دو طرف امتداد می‌دهیم تا دایره بزرگ را در D و E قطع کند. شعاع بر خط مماس در نقطه تماس عمود است، پس داریم:

$$O'P \perp BC, BC \parallel OO' \Rightarrow O'P \perp OO'$$

$$OO'E : OO'^2 + O'E^2 = OE^2 \xrightarrow{OE=6} 3^2 + O'E^2 = 6^2 \Rightarrow O'E^2 = 36 - 9 = 27 \\ \Rightarrow O'E = \sqrt{27} \Rightarrow O'E = 3\sqrt{3}$$

در دایره بزرگ، شعاع OA عمود بر وتر DE است، پس آن را نصف می‌کند.

$$O'D = O'E \Rightarrow O'D = 3\sqrt{3} \Rightarrow PD = O'D - O'P = 3\sqrt{3} - 3$$

$$PE = O'P + O'E = 3 + 3\sqrt{3}$$

با استفاده از رابطه طولی در دایره بزرگ داریم:

$$PB \times PC = PD \times PE = (3\sqrt{3} - 3) \times (3\sqrt{3} + 3) = 27 - 9 = 18$$



p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » که خوانده می‌شود « p و q » را «ترکیب عطفی» دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « \wedge » عاطف گفته می‌شود. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره « $p \wedge q$ » فقط وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد و در بقیه حالات ارزش « $p \wedge q$ » نادرست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \vee q$ » را که به صورت « p و q » می‌نویسند، «ترکیب فصلی» دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « \vee » فاصل گفته می‌شود. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره « $p \vee q$ » فقط وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات ارزش « $p \vee q$ » درست است.



از آنجایی که p درست است، داریم:

$$\left. \begin{aligned} p \wedge q \equiv T \wedge q \equiv q \\ p \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r \end{aligned} \right\} \Rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv q \vee r$$

پس بایستی گزاره $q \vee r$ نادرست باشد که در نتیجه q و r باید هر دو نادرست باشند.
بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۲۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)



- عبارت‌هایی مانند «هر»، «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی مقادیر» به سور معروف‌اند. گزاره‌ها یا گزاره‌نمایی که شامل عبارت‌های سوری باشند به «گزاره‌های سوری» معروف‌اند. در هر گزاره سوری که شامل متغیر باشد، دامنه متغیر باید مشخص باشد. برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به‌ازای هر» یا «به‌ازای جمیع مقادیر» از نماد \forall و به جای «وجود دارد» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود.
- گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.
- گزاره‌نمای شامل سور عمومی هنگامی درست است که مجموعه جواب با دامنه متغیر برابر باشد.



با توجه به دامنه متغیر، $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $m + 7 = 20 \Rightarrow m = 13 \notin S$ *

گزینه ۲: $m = 1 \Rightarrow m + 3 = 4 \neq 8$ *

گزینه ۳: $m = 1 \Rightarrow m + 2 = 3 \leq 6$ ✓

گزینه ۴: $m = 5 \Rightarrow m + 5 = 10 \not\leq 9$ *

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۲۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)



- با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی، تساوی‌های زیر برقرارند:

۱) $A \cup A' = U$

۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup U = U$

۴) $A \cap U = A$

- (خاصیت شرکت پذیری):

الف) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

ب) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

- (خاصیت توزیع پذیری):

الف) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

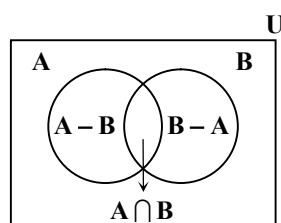
ب) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A - B = A \cap B'$

- برای دو مجموعه دلخواه A و B داریم:



به کمک نمودار ون، داریم:



$(A - B) - A = \emptyset$

$(A \cup B) - B = A - B$

$[(A - B) - A] \cup [(A \cup B) - B] = \emptyset \cup (A - B) = A - B$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.



با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، داریم:

$$\begin{aligned} [(A-B)-A] \cup [(A \cup B)-B] &= [(A \cap B') \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B'] \\ &= [\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cap B'] \cup [(A \cap B') \cup (\underbrace{B \cap B'}_{\emptyset})] = \emptyset \cup (A \cap B') = A \cap B' = A - B \end{aligned}$$

۳۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)



- (عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه): اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، $A \times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود:
 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
 در این تعریف توجه دارید که در هر (x, y) متعلق به $A \times B$ ، همواره مؤلفه یا مختص اول، یعنی x باید از مجموعه A و متناظراً مؤلفه دوم، یعنی y باید از مجموعه B باشد.
 - فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.



ابتدا هریک از مجموعه‌های A و B را با نوشتن اعضایشان مشخص می‌کنیم.
 $A = \{1, 2, 5\}$, $|m-2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m-2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq m \leq 3 \Rightarrow B = \{1, 2, 3\}$
 حال مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ را می‌نویسیم:
 $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$
 $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 5)\}$
 $(A \times B) - (B \times A)$ به صورت زیر است.
 $(A \times B) - (B \times A) = \{(1, 2), (2, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$
 مجموعه $(A \times B) - (B \times A)$ تعداد ۵ عضو و در نتیجه تعداد $3^5 - 1 = 242$ زیرمجموعه ناتهی دارد.
 بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۳۱- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۲)



- در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:
 (۱) $0 \leq P(A) \leq 1$
 (۲) $P(S) = 1$
 (۳) $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$



با توجه به فرض سؤال، داریم:
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $P(2) = P(3) = P(5) = P(6) = x$, $P(1) = P(4) = 4x$
 حال طبق نکته، داریم:
 $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$
 $4x + x + x + 4x + x + x = 1 \Rightarrow 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$
 پس احتمال وقوع عدد مضرب ۳، برابر است با:
 $P(\{3, 6\}) = P(3) + P(6) = x + x = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

۳۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: استدلال * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)



- مجموعه همه زیرمجموعه های A ، مجموعه توانی A نامیده می شود و آن را با $P(A)$ نمایش می دهیم. اگر A ، n عضو داشته باشد، در این صورت $P(A) = 2^n$ ، عضو دارد.
- اگر $A \subseteq B$ به طوری که $A \neq B$ ، آنگاه A زیرمجموعه محض یا سره B نامیده می شود.



چون $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، پس $A = B$. واضح است که $x - 1$ برابر ۱ یا ۲ است، پس داریم:

$$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 4 - 8 + 6 = 2 \quad \checkmark$$

$$x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 9 - 12 + 6 = 3 \quad \times$$

$$C = \{4, 4, 1, 1\} = \{1, 4\}$$

پس $x = 2$ است و مجموعه C به صورت زیر خواهد بود:

مجموعه C دارای ۲ عضو است پس مجموعه توانی آن دارای ۴ عضو است. پس مجموعه توانی مجموعه C تعداد $2^4 - 1 = 15$ زیرمجموعه محض دارد.
بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۳۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۲)



- در فضای نمونه ای متناهی با احتمال غیرهم شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (۳)$$

$$P(S) = 1 \quad (۲) \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (۱)$$



با توجه به اطلاعات سؤال، داریم:

$$S = \{a, b, c\}$$

$$P(a) = 3P(b), \quad P(c) = \frac{1}{2}P(b') \Rightarrow P(c) = \frac{1}{2}(1 - P(b)) \Rightarrow P(c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(b)$$

حال از نکته استفاده می کنیم.

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1 \Rightarrow 3P(b) + P(b) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(b) = 1$$

$$\Rightarrow 4P(b) - \frac{1}{2}P(b) = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{2}P(b) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(b) = \frac{1}{7}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$P(\{a, c\}) = P(a) + P(c) = 3P(b) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(b) = \frac{5}{2}P(b) + \frac{1}{2} \Rightarrow P(\{a, c\}) = \frac{5}{2} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{5}{14} + \frac{1}{2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

۳۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)



- هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » که خوانده می شود « p و q » را «ترکیب عطفی» دو گزاره می گوئیم. در اینجا به رابط منطقی « \wedge » عاطف گفته می شود. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره « $p \wedge q$ » فقط وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است:

- (۱) هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آنگاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد.
(۲) ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

برای دو گزاره p و q همواره داریم: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
خاصیت توزیع پذیری (بخشی):

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

برای گزاره دلخواه p ، داریم:

الف) $p \wedge \sim p \equiv F$

ب) $p \vee \sim p \equiv T$

پ) $p \vee T \equiv T$

ت) $p \wedge T \equiv P$

ث) $p \vee F \equiv P$

ج) $p \wedge F \equiv F$

خاصیت شرکت پذیری:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$



با رسم جدول ارزش گزاره‌ها، داریم:

p	q	$\sim p$	$q \Rightarrow \sim p$	$(q \Rightarrow \sim p) \wedge p$	$[(q \Rightarrow \sim p) \wedge p] \wedge q$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن
ن	د	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

واضح است که ارزش گزاره مفروض، همواره نادرست است.
بنابراین گزینه ۴ درست است.



به کمک قوانین منطق گزاره‌ها، داریم:

$$\begin{aligned} [(q \Rightarrow \sim p) \wedge p] \wedge q &\equiv [(\sim q \vee \sim p) \wedge p] \wedge q \equiv [(\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge p)] \wedge q \\ &\equiv [(\sim q \wedge p) \vee F] \wedge q \equiv (\sim q \wedge p) \wedge q \equiv (\sim q \wedge q) \wedge p \equiv F \wedge p \equiv F \end{aligned}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * آمار و احتمال (فصل ۲، درس ۱)

۳۵- پاسخ: گزینه ۴



برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

برای پیشامد دلخواه A داریم: $P(A') = 1 - P(A)$

برای دو پیشامد A و B ، پیشامد آنکه فقط یکی از دو پیشامد اتفاق بیفتد یعنی پیشامد آنکه فقط A یا فقط B اتفاق بیفتد برابر است با:

$$(A - B) \cup (B - A)$$

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$



احتمال قبولی سعید در درس آمار و احتمال را $P(A)$ و احتمال قبولی او در درس هندسه را $P(B)$ در نظر گرفته و داریم:

$$P(A) = 0/8 \text{ و } P(B) = 0/7$$

احتمال آنکه فقط در یکی از دو درس قبول شود برابر $P(A-B) + P(B-A)$ است، پس:

$$P(A-B) + P(B-A) = 0/2 \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0/2$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0/2 \Rightarrow 0/8 + 0/7 - 2P(A \cap B) = 0/2$$

$$\Rightarrow 2P(A \cap B) = 1/5 - 0/2 \Rightarrow 2P(A \cap B) = 1/3 \Rightarrow P(A \cap B) = 0/65$$

$P(A \cup B)$ را محاسبه می کنیم.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/8 + 0/7 - 0/65 = 0/85$$

خواسته سؤال $P(A' \cap B')$ است.

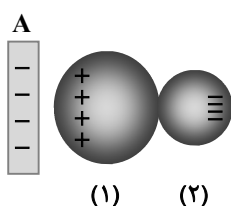
$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0/85 = 0/15$$

فیزیک



۳۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)



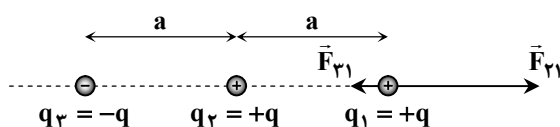
می دانیم اگر دو جسم به هم مالش داده شوند، الکترون از جسم بالایی به پایینی منتقل می شود؛ پس در مالش دو جسم A و B، ماده A دارای بار منفی و ماده B دارای بار مثبت می شود. حال اگر میله با بار منفی را به کره های (۱) و (۲) نزدیک کنیم، در کره (۱) بار مثبت و در کره (۲) بار منفی القا می شود و با توجه به اصل پایستگی بار الکتریکی اندازه بارهای مثبت و منفی باید با یکدیگر برابر باشند.

۳۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)



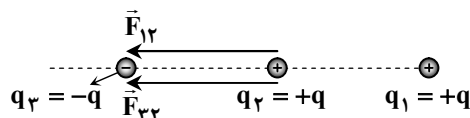
نیروهای الکتریکی وارد بر بار سمت راست مطابق شکل زیر است:



$$F_{21} = k \frac{q^2}{a^2}, \quad F_{31} = k \frac{q^2}{4a^2}$$

$$F_{t1} = F_{21} - F_{31} = k \frac{q^2}{a^2} - k \frac{q^2}{4a^2} = \frac{3}{4} k \frac{q^2}{a^2}$$

نیروهای الکتریکی وارد بر بار میانی مطابق شکل زیر است:



با توجه به اینکه هر دو نیرو به سمت چپ هستند؛ پس نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار q_2 نیز به سمت چپ خواهد بود:

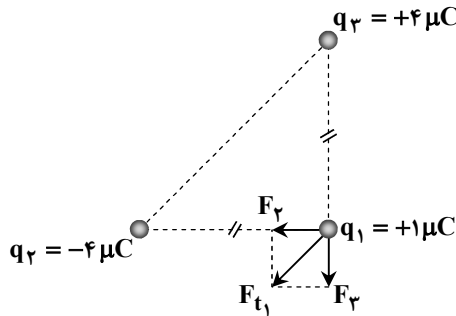
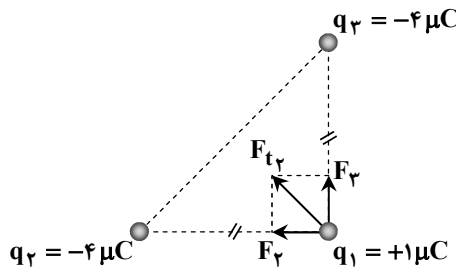
$$F_{32} = F_{12} = k \frac{q^2}{a^2} \Rightarrow F_{t2} = F_{12} + F_{32} = 2k \frac{q^2}{a^2}$$

نسبت اندازه دو نیروی الکتریکی خالص برابر است با:

$$\frac{F_{t2}}{F_{t1}} = \frac{2k \frac{q^2}{a^2}}{\frac{3}{4} k \frac{q^2}{a^2}} = \frac{8}{3}$$

۳۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)

در حالت اول نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_1 و نیروی خالص الکتریکی مطابق شکل زیر است:در حالت دوم نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_1 و نیروی خالص الکتریکی به صورت زیر خواهد بود:

با توجه به شکل روبه‌رو، نیروی خالص الکتریکی در جهت عقربه‌های ساعت ۹۰° دوران کرده است.



۳۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)

وقتی بار q_2 در نقطه A قرار دارد، نیروی الکتریکی وارد بر بار q_1 جاذبه و به سمت بالا (در راستای \vec{j}) است. طبق قانون کولن مقدار این نیرو برابر است با:

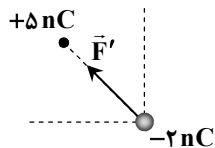
$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 5 \times 10^{-18}}{36 \times 10^{-4}} \Rightarrow F = 2/5 \times 10^{-5} \text{ N} \Rightarrow \vec{F} = (2/5 \times 10^{-5} \text{ N}) \vec{j} \Rightarrow a = 2/5 \times 10^{-5} \text{ N}$$

وقتی بار q_2 در محل B قرار گیرد، مقدار نیرو ثابت است؛ زیرا اندازه بارها و فاصله‌ها ثابت است؛ پس خواهیم داشت:

$$F' = F \Rightarrow b^2 + (2 \times 10^{-5})^2 = (2/5 \times 10^{-5})^2 \Rightarrow b^2 = 2/25 \times 10^{-10} \Rightarrow |b| = 1/5 \times 10^{-5} \text{ N}$$

از طرفی هنگامی که بار q_2 در نقطه B قرار می‌گیرد، جهت نیروی الکتریکی وارد بر بار q_1 مطابق شکل روبه‌رو است؛ پس مؤلفه افقی \vec{F}' منفی است:

$$b = -1/5 \times 10^{-5} \text{ N}$$



۴۰- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)

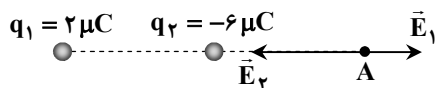
در نقطه A دو میدان حاصل از بارهای q_1 و q_2 مطابق شکل ایجاد می‌شود که مقدار هر یک برابر است با:

$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{6^2} = 500 \frac{\text{N}}{\text{C}} \Rightarrow \vec{E}_1 = 500 \vec{i}$$

$$E_2 = k \frac{|q_2|}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{6 \times 10^{-6}}{3^2} = 6000 \frac{\text{N}}{\text{C}} \Rightarrow \vec{E}_2 = -6000 \vec{i}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 500 \vec{i} - 6000 \vec{i} = -5500 \vec{i}$$

میدان الکتریکی خالص در نقطه A برابر است با:





با توجه به رابطه $E = k \frac{|q|}{r^2}$ می توان نوشت:

$$E_2 = E_1 \Rightarrow k \frac{q_1}{r_1^2} = k \frac{q_2}{(\frac{3}{2}r)^2} \Rightarrow q_2 = \frac{9}{4}q_1$$

از طرفی می دانیم $q_2 = q_1 + 20$ (برحسب میکروکولن) است:

$$q_1 + 20 = \frac{9}{4}q_1 \Rightarrow \frac{5}{4}q_1 = 20 \Rightarrow q_1 = 16 \mu C$$

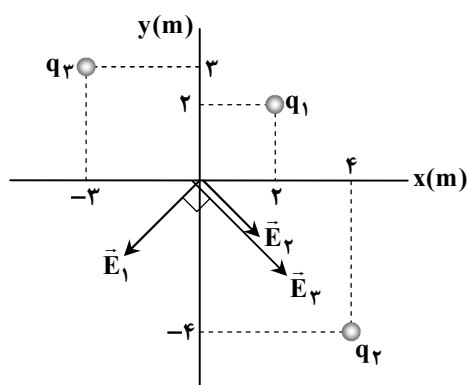


ابتدا میدان الکتریکی دو بار q_1 و q_2 را در مبدأ مختصات تعیین می کنیم:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{8 \times 10^{-6}}{(\sqrt{2^2 + 2^2})^2} = 9 \times 10^3 \frac{N}{C}$$

$$E_2 = k \frac{|q_2|}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{8 \times 10^{-6}}{(\sqrt{4^2 + 4^2})^2} = 2/25 \times 10^3 \frac{N}{C}$$

با توجه به شکل، بردارهای \vec{E}_2 و \vec{E}_3 هم جهت و بر بردار \vec{E}_1 عمودند؛ بنابراین میدان برابر است با:



$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_{2,3}^2} \Rightarrow 1/5 \times 10^4 = \sqrt{(9 \times 10^3)^2 + E_{2,3}^2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow E_{2,3} = 1/2 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

$$E_{2,3} = E_2 + E_3 \Rightarrow 1/2 \times 10^4 = 2/25 \times 10^3 + E_3$$

$$\Rightarrow E_3 = 9/75 \times 10^3 \frac{N}{C}$$

$$E_3 = \frac{k|q_3|}{r_3^2} \Rightarrow 9/75 \times 10^3 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q_3|}{(3\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow |q_3| = 19/5 \times 10^{-6} C \xrightarrow{q_3 > 0} q_3 = 19/5 \mu C$$



– خوب است دسته اعداد فیثاغورسی پر کاربرد مانند ۳-۴-۵ را به خاطر داشته باشید و بتوانید دسته های نظیر آن ها را به دست آورید. برای مثال با ضرب اعداد فوق در ۳/۰، به دسته ۹/۰، ۲/۱ و ۵/۱ می رسیم و بدین ترتیب بدون عملیات ریاضی می توان مقدار $E_{2,3}$ را در عبارت (*) به دست آورد.



در نقطه O چهار میدان الکتریکی حاصل از ۴ ذره باردار برقرار است و با توجه به اینکه میدان خالص در نقطه O صفر است؛ پس میدان حاصل از بارهای q_1 و q_3 یکدیگر را خنثی و میدان حاصل از بارهای q_2 و q_4 همدیگر را خنثی می کنند و چون فاصله ذره ها تا نقطه O یکسان است؛ پس $q_1 = q_3$ و $q_2 = q_4$ است.

در حالت اول وقتی به جای بار q_3 بار $-q_3$ قرار می دهیم، میدان حاصل از دو بار q_2 و q_4 کماکان همدیگر را خنثی می کنند و میدان حاصل از $-q_3$ قرینه حالت قبل می شود. اگر اندازه میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارهای q_1 و q_3 در حالت قبل، E_1 باشد، در حالت جدید میدان هر دو بار هم جهت با یکدیگر می شوند و اندازه میدان برابر $2E_1$ می شود:

$$E = 2E_1 = 2k \frac{|q_1|}{a^2} \quad (a = \text{نصف قطر مربع})$$

به طریق مشابه خواهیم داشت:

$$E' = 2E_r = 2k \frac{|q_2|}{a^2}$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{E'}{E} = \frac{2k \frac{|q_2|}{a^2}}{2k \frac{|q_1|}{a^2}} = \frac{|q_2|}{|q_1|}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: استدلال * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۴۴- پاسخ: گزینه ۴



اگر بار q تنها بود، خطوط میدان اطراف q باید شعاعی می بود؛ در حالی که این طور نیست؛ پس مورد «الف» نادرست است.
چون جهت خطوط به بار q ختم می شود، پس علامت بار آن منفی است و مورد «ب» نادرست است.
هرچند در نقطه A خط میدانی وجود ندارد ولی این به معنای صفر بودن میدان در آن نقطه نیست؛ پس گزاره «پ» هم نادرست است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۴۵- پاسخ: گزینه ۲



نیروی الکتریکی وارد بر ذره به دلیل منفی بودن ذره به سمت چپ خواهد بود؛ پس شتاب ذره نیز به سمت چپ است. مقدار شتاب طبق قانون دوم نیوتون برابر است با:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{E|q|}{m} = \frac{5 \times 10^4 \times 10 \times 10^{-9}}{20 \times 10^{-6}} = 25 \frac{m}{s^2}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۴۶- پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از رابطه $\Delta V = \frac{\Delta U_E}{q}$ خواهیم داشت:

$$\Delta U = q\Delta V = q(V_+ - V_-) = (-1/6 \times 10^{-19}) \times (25) = -4 \times 10^{-18} \text{ J}$$

بنابراین انرژی پتانسیل الکترون 4×10^{-18} ژول کاهش می یابد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۴۷- پاسخ: گزینه ۴



طبق قضیه کار- انرژی جنبشی می توان نوشت:

$$\begin{cases} W_t = \Delta K \Rightarrow W_E = \Delta K \\ W_E = -q\Delta V \end{cases} \Rightarrow -q(V_B - V_A) = K_B - K_A = K_B = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow -2 \times 10^{-19} \times (V_B - 50) = \frac{1}{2} \times 6/4 \times 10^{-27} \times 10^{10} \Rightarrow V_B - 50 = -100 \Rightarrow V_B = -50 \text{ V}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۴۸- پاسخ: گزینه ۲



پس از بردار شدن دو گلوله در اثر تماس با فلز، با توجه به اینکه نوک رسانا تراکم بار و میدان الکتریکی بیشتری دارد، به گلوله (۱) نیروی بیشتری وارد می کند و گلوله (۱) دورتر قرار می گیرد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۴۹- پاسخ: گزینه ۱



با توجه به رابطه $C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d}$ می توان نوشت:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{A_2}{A_1} \times \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \frac{1/2 A_1}{A_1} \times \frac{d_1}{1/25 d_1} = \frac{1/2}{1/25} = 0.96$$

$$\text{درصد تغییرات ظرفیت خازن} = \frac{\Delta C}{C_1} \times 100 = \frac{0.96 C_1 - C_1}{C_1} \times 100 = \frac{-0.04 C_1}{C_1} \times 100 = -4\%$$

پس ظرفیت خازن ۴ درصد کاهش می یابد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطه: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۵۰- پاسخ: گزینه ۳



با جدا شدن خازن از باتری، بار خازن ثابت می ماند.

$$\begin{cases} Q_2 = Q_1 \\ C_2 = 2C_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times \frac{C_1}{C_2} = 1 \times \frac{1}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2} V$$

با کاهش ۴۰ درصدی بار خازن پس از جرقه، ولتاژ آن نیز ۴۰ درصد کاهش می یابد؛ پس خواهیم داشت:

$$V_3 = 0.6 V_2 = 0.6 \times \frac{1}{2} V = 0.3 V$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۵۱- پاسخ: گزینه ۲



با توجه به رابطه $U = \frac{1}{2} C V^2$ ، ظرفیت خازن برابر است با $C = \frac{2U}{V^2}$ ؛ پس فاراد (F) معادل $\frac{J}{V^2}$ است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۵۲- پاسخ: گزینه ۴



با توجه به قانون اهم، جریان عبوری از باتری برابر است با:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{24}{60} = 0.4 \text{ A}$$

با توجه به اینکه حداکثر باری که این باتری می تواند به طور ایمن از خود عبور دهد تا تخلیه شود، 80 Ah است؛ می توان نوشت:

$$\Delta q = I \Delta t \Rightarrow 80 = 0.4 \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = 200 \text{ h}$$

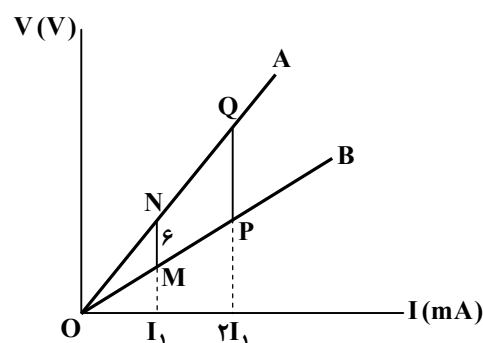
▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطه: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۲)

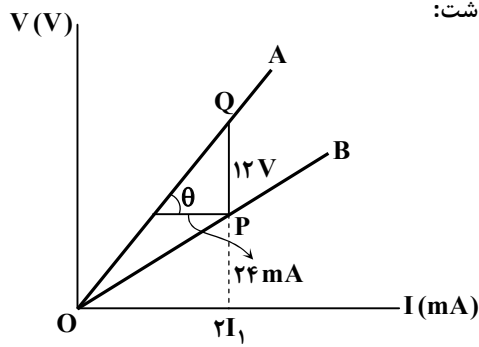
۵۳- پاسخ: گزینه ۱



طبق تالس در مثلث OPQ در نمودار مقابل می توان نوشت:

$$\frac{PQ}{MN} = \frac{2I_1}{I_1} = 2 \Rightarrow PQ = 12 \text{ V}$$



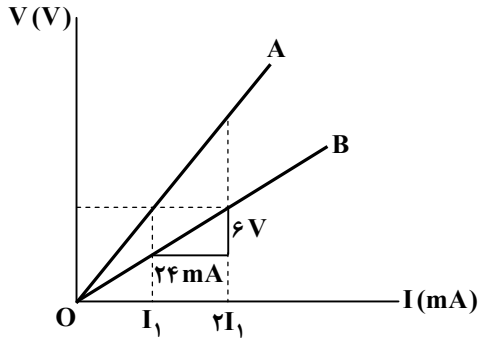


می‌دانیم شیب نمودار $V-I$ برابر مقاومت رسانا است. پس با توجه به شکل، خواهیم داشت:

$$\text{شیب نمودار A} = \tan \theta = \frac{12}{24 \times 10^{-3}} = \frac{1000}{2} = 500 \Omega$$

$$\Rightarrow R_A = 500 \Omega$$

تا همین جا مشخص است که گزینه ۱ پاسخ سؤال است. اما برای به دست آوردن مقاومت رسانای B می‌توان نوشت:



$$\text{شیب نمودار B} = \frac{6}{24 \times 10^{-3}} = \frac{1000}{4} = 250 \Omega$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: دانش * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۵۴- پاسخ: گزینه ۱



الف) درست؛ هنگام عبور جریان در یک رسانا، الکترون‌های آزاد به اتم‌های در حال نوسان برخورد می‌کنند. این برخوردها باعث گرم شدن رسانا و ایجاد مقاومت در برابر جریان می‌شود.



ب) نادرست؛ در رساناهای غیراھمی، رابطه ولتاژ و جریان غیرخطی است؛ چرا که طبق قانون اهم $V = RI$ رابطه V و I خطی است ولی رسانای غیراھمی از قانون اهم پیروی نمی‌کند؛ پس رابطه بین آن‌ها خطی نیست.
پ) نادرست؛ قانون اهم برای فلزات و بسیاری از رساناهای غیرفلزی در دمای ثابت برقرار است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۵۵- پاسخ: گزینه ۳



با توجه به رابطه $R = \rho \frac{L}{A}$ مقدار هر یک از مقاومت‌ها برابر است با:

$$R_1 = \rho \frac{L}{A}, \quad R_2 = \rho \frac{2L}{A} = 2\rho \frac{L}{A}, \quad R_3 = \rho \frac{L}{2A} = \frac{1}{2}\rho \frac{L}{A}, \quad R_4 = \rho \frac{2L}{2A} = \rho \frac{L}{A}$$

بین این چهار مقاومت، R_2 بیشترین مقدار را دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۵۶- پاسخ: گزینه ۲



با توجه به رابطه $\rho_2 = \rho_1 (1 + \alpha \Delta \theta)$ می‌توان نوشت:

$$\rho_2 = \rho_1 (1 + \alpha \Delta \theta) \Rightarrow 2 / 4 \times 10^{-7} = 10^{-7} (1 + \alpha \times (200))$$

$$\Rightarrow 2 / 4 = 200\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1/4}{200} = 7 \times 10^{-3} \frac{1}{K}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۵۷- پاسخ: گزینه ۴



اختلاف پتانسیل دو سر باتری با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت برابر است؛ پس خواهیم داشت:

$$V = RI \Rightarrow 10 = 2/\Delta I \Rightarrow I = 4A$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \Rightarrow 4 = \frac{\mathcal{E}}{2/\Delta + 0/\Delta} \Rightarrow \mathcal{E} = 12V$$

از طرفی جریان مدار برابر است با:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۵۸- پاسخ: گزینه ۲



نمودار اختلاف پتانسیل دو سر باتری بر حسب جریان مطابق شکل روبه‌رو است. به این ترتیب روشن می‌شود که:

$$\mathcal{E}_A = 10V, \mathcal{E}_B = 20V, \frac{\mathcal{E}_A}{r_A} = \frac{\mathcal{E}_B}{r_B} \Rightarrow r_B = 2r_A$$

از طرفی به‌ازای جریان ۵A، اختلاف ولتاژ دو سر باتری‌ها ۷/۵ ولت است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$7/5 = (\mathcal{E}_B - r_B I) - (\mathcal{E}_A - r_A I) \Rightarrow 7/5 = 10 - (r_B - r_A) \times 5$$

$$\xrightarrow{r_B = 2r_A} 7/5 = 10 - 5r_A \Rightarrow r_A = 0/5\Omega$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۵۹- پاسخ: گزینه ۱



جهت جریان مطابق جهت جریان باتری ۱ (پادساعتگرد) است؛ چرا که نیروی محرکه آن قوی‌تر است. پس جریان عبوری از مقاومت از A به

B است. جریان عبوری از این مدار برابر است با:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} \Rightarrow I = \frac{30 - 8}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 1/5} = \frac{22}{2/5} = 11A$$

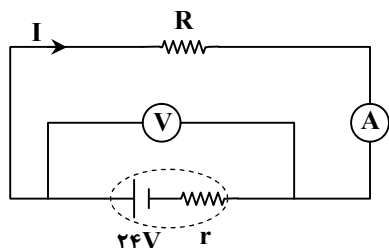
▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطة: کاربرد * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۰- پاسخ: گزینه ۴



جریان عبوری از آمپرسنج و ولتاژ نشان داده‌شده توسط ولت‌سنج را در حالتی که مقاومت

R در مدار قرار دارد، به‌دست می‌آوریم:

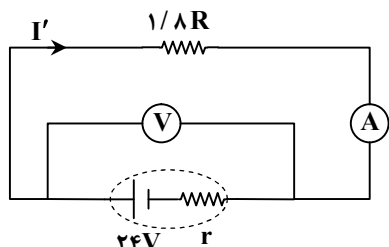


$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{24}{R+r} \quad (\text{رابطه ۱})$$

$$V = RI = \frac{24R}{R+r} \quad (\text{رابطه ۲})$$

جریان نشان داده‌شده توسط آمپرسنج را هنگامی که مقاومت ۱/۸R در مدار قرار دارد،

محاسبه می‌کنیم:



$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R'+r} = \frac{24}{1/8R+r} \quad (\text{رابطه ۳})$$

مطابق فرض سؤال، جریان I' نسبت به جریان I، ۴۰ درصد کاهش یافته است، بنابراین:

$$I' = I - \frac{40}{100}I = \frac{60}{100}I = 0/6I \xrightarrow{\text{رابطه (۱) و (۳)}} \frac{24}{1/8R+r} = 0/6 \times \frac{24}{R+r} \Rightarrow \frac{1}{1/8R+r} = \frac{3}{5(R+r)}$$

$$\Rightarrow 5R + 5r = 5/4R + 3r \Rightarrow 0/4R = 2r \Rightarrow R = 5r \quad (\text{رابطه ۴})$$

در پایان خواسته سؤال که ولتاژ نشان داده‌شده توسط ولت‌سنج قبل از تغییر R است را محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{رابطه ۲}} V = \frac{24R}{R+r} \xrightarrow{\text{رابطه ۴}} V = \frac{24 \times (5r)}{5r+r} = \frac{24 \times 5r}{6r} = \frac{24 \times 5}{6} = 20V$$

شیمی

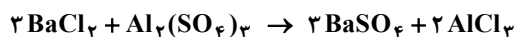


▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * شیمی ۲ (فصل ۱)

۶۱- پاسخ: گزینه ۳



ابتدا معادله را موازنه می‌کنیم:



$$\begin{aligned} ? \text{ g BaSO}_4 : 300 \text{ g Al}_2(\text{SO}_4)_3 & \times \frac{\text{خالص } 68/4 \text{ g Al}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{خالص } 100 \text{ g Al}_2(\text{SO}_4)_3} \times \frac{1 \text{ mol Al}_2(\text{SO}_4)_3}{342 \text{ g Al}_2(\text{SO}_4)_3} \times \frac{3 \text{ mol BaSO}_4}{1 \text{ mol Al}_2(\text{SO}_4)_3} \\ & \times \frac{233 \text{ g BaSO}_4}{1 \text{ mol BaSO}_4} = 419/4 \text{ g BaSO}_4 \end{aligned}$$



$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} = \frac{\text{جرم}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{300 \times \frac{68}{4}}{342 \times 1} = \frac{x}{233 \times 3} \Rightarrow x = 419/4 \text{ g BaSO}_4$$

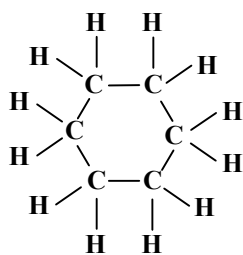
▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: دانش * شیمی ۲ (فصل ۱)

۶۲- پاسخ: گزینه ۲



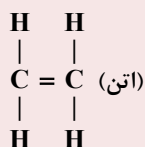
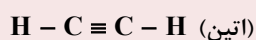
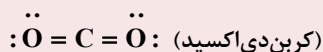
(الف) درست؛ ترکیب‌های شناخته‌شده از اتم کربن بیشتر از مجموع ترکیب‌های شناخته‌شده از دیگر عناصر جدول تناوبی است.

(ت) درست؛ کربن توانایی تشکیل حلقه‌های شش‌تایی و زنجیره کربنی ده‌تایی را دارد.



(ب) نادرست؛ اتم نیتروژن در واکنش با فلزها می‌تواند با دریافت ۳ الکترون و تشکیل پیوند یونی پایدار شود.

(پ) نادرست؛ در کربن‌دی‌اکسید همانند اتن و در هیدروژن سیانید همانند اتین به‌ترتیب پیوندهای اشتراکی دوگانه و سه‌گانه دیده می‌شود.





$$Q = mc\Delta\theta$$

$$x \times 10^3 = m \times 0.13 \times 50 \Rightarrow m = \frac{x \times 10^3}{6.5}$$

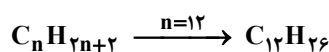
$$x \times 10^3 = m' \times 0.26 \times 100 \Rightarrow m' = \frac{x \times 10^3}{26}$$

$$\Rightarrow \frac{m'}{m} = \frac{\frac{x \times 10^3}{26}}{\frac{x \times 10^3}{6.5}} = \frac{1}{4} \Rightarrow m' = \frac{m}{4}$$

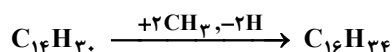


گزینه ۱: نادرست؛ در یک آلکان راست‌زنجیر تعداد پیوندهای اشتراکی میان اتم‌های کربن، یک واحد از شمار کل اتم‌های کربن کمتر است (n-1) پس آلکان موردنظر ۹ اتم کربن دارد و فرمول مولکولی آن C_9H_{20} است. تعداد پیوندهای اشتراکی میان اتم‌های کربن و هیدروژن برابر با تعداد کل هیدروژن‌ها در ساختار آلکان است (2n+2)، پس ۲۰ پیوند میان کربن‌ها و هیدروژن‌ها وجود دارد نه ۱۸ پیوند! بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: درست؛ در فرمول پیوند- خط یک هیدروکربن پیوند میان اتم‌های کربن را با خط تیره نشان می‌دهند، اما پیوند میان اتم‌های کربن و هیدروژن نشان داده نمی‌شود. در صورت سؤال تعداد خطوط در فرمول پیوند- خط ۱۱ ذکر شده است یعنی تعداد پیوندهای میان کربن‌ها ۱۱ است که از تعداد کل کربن‌ها یک واحد کمتر می‌باشد، پس آلکان موردنظر ۱۲ اتم کربن و ۲۶ اتم هیدروژن دارد:



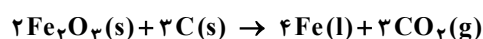
گزینه ۳: درست؛ هنگامی که به یک آلکان گروه متیل (CH_3) اضافه می‌شود، عملاً تعداد اتم‌های کربن (n) افزایش یافته است وقتی به یک آلکان با ۱۴ اتم کربن دو گروه متیل اضافه شود یعنی تعداد کربن‌ها به ۱۶ می‌رسد، پس طبق فرمول عمومی آلکان‌ها (C_nH_{2n+2}) تعداد اتم‌های هیدروژن برابر با ۳۴ می‌شود.



گزینه ۴: درست؛ تعداد پیوندهای کربن با هیدروژن در یک آلکان راست‌زنجیر ۲ برابر تعداد الکترون‌های لایه ظرفیت اتم کربن (۴) است، یعنی $2 \times 4 = 8$ ؛ پس آلکان موردنظر دارای ۸ اتم هیدروژن و ۳ اتم کربن است (C_3H_8). پروپان در دما و فشار اتاق به‌صورت گاز است.



الف) درست؛ در این واکنش، گاز کربن‌دی‌اکسید (CO_2) تولید می‌شود که از مخلوط واکنش خارج می‌گردد، در نتیجه جرم مواد جامد کاهش می‌یابد.



ب) درست؛ در هر واکنشی که به‌طور طبیعی انجام‌پذیر باشد، انرژی کل فراورده‌ها همواره از انرژی کل واکنش‌دهنده‌ها کمتر است. این کاهش انرژی باعث پایداری بیشتر فراورده‌ها نسبت به واکنش‌دهنده‌ها می‌شود؛ بنابراین واکنش‌پذیری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها کمتر است و به حالت پایداری بیشتری رسیده‌اند.



پ) نادرست؛ فلزاتی مانند پلاتین، نقره و مس نیز گاهی به‌صورت فلز آزاد در طبیعت یافت می‌شوند.
ت) نادرست؛ اسکندیم (Sc) که در تهیه وسایل خانگی مانند تلویزیون رنگی کاربرد دارد، اولین فلز واسطه‌ای است که با از دست دادن الکترون‌هایش به آرایش الکترونی گاز نجیب، یعنی آرگون (Ar) می‌رسد.

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * شیمی ۲ (فصل ۲)

۶۶- پاسخ: گزینه ۳



گزینه ۱: نادرست؛ مجموع انرژی جنبشی ذرات سازنده یک ماده، هم‌ارز با انرژی گرمایی آن است. دما هم‌ارز با میانگین تندی و میانگین انرژی جنبشی ذرات یک ماده است.

گزینه ۲: نادرست؛ انرژی گرمایی یک ماده هم‌ارز با مجموع انرژی جنبشی ذرات سازنده آن ماده است.

گزینه ۴: رابطه دما بر حسب درجه سلسیوس و کلون به صورت $T = \theta + ۲۷۳$ است. براساس این رابطه، ارزش دمایی ۱°C با ۱K برابر است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * شیمی ۲ (فصل ۱)

۶۷- پاسخ: گزینه ۱



$$? \text{ kg MgO} : ۵ \text{ ton سنگ} \times \frac{۱۰^۶ \text{ g سنگ}}{۱ \text{ ton سنگ}} \times \frac{۲/۴ \text{ g S}}{۱۰۰ \text{ g سنگ}} \times \frac{۱ \text{ mol S}}{۳۲ \text{ g S}} \times \frac{۱ \text{ mol SO}_2}{۱ \text{ mol S}} \times \frac{۱ \text{ mol MgO}}{۱ \text{ mol SO}_2} \times \frac{۴۰ \text{ g MgO}}{۱ \text{ mol MgO}} \\ \times \frac{۱ \text{ kg MgO}}{۱۰^۳ \text{ g MgO}} = ۱۵۰ \text{ kg MgO}$$

$$? \text{ ton MgCO}_3 : ۱۵۰ \text{ kg MgO} \times \frac{۱۰^۳ \text{ g MgO}}{۱ \text{ kg MgO}} \times \frac{۱ \text{ mol MgO}}{۴۰ \text{ g MgO}} \times \frac{۱ \text{ mol MgCO}_3}{۱ \text{ mol MgO}} \times \frac{۸۴ \text{ g MgCO}_3}{۱ \text{ mol MgCO}_3} \\ \times \frac{۱۰۰ \text{ g MgCO}_3}{۴۲ \text{ g MgCO}_3} \times \frac{۱ \text{ ton MgCO}_3}{۱۰^۶ \text{ g MgCO}_3} = ۰/۷۵ \text{ ton MgCO}_3$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: استدلال * شیمی ۲ (فصل ۱)

۶۸- پاسخ: گزینه ۳



عبارت‌های «دوم»، «سوم» و «چهارم» درست هستند.

عبارت «اول»: نادرست؛ در میان عناصر گروه اول، H و K دارای نماد تک حرفی هستند.

عبارت «دوم»: درست

عبارت «سوم»: درست؛ پتاسیم از سدیم یک خانه پایین‌تر است، شعاع اتمی بزرگ‌تر دارد و در نتیجه دارای خصلت فلزی بیشتری می‌باشد.

عبارت «چهارم»: درست؛ فرانسیم آخرین عنصر گروه ۱ جدول است و پرتوزا می‌باشد. (عناصر با عدد اتمی بالای ۸۵ پرتوزا هستند.)

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * شیمی ۲ (فصل ۱)

۶۹- پاسخ: گزینه ۴



(الف) درست؛ بازیافت فلزها باعث کاهش استخراج معادن و مصرف انرژی می‌شود و به همین دلیل آلودگی و تخریب محیط‌زیست را کاهش می‌دهد.

(ب) درست؛ ارزیابی چرخه عمر به بررسی مراحل تهیه مواد خام و اولیه، تولید، مصرف و دفع یک محصول از نظر تأثیرات زیست‌محیطی می‌پردازد.

(پ) درست؛ پس از استخراج فلزها یا بازیافت آن‌ها می‌توان وسایل فلزی را تولید کرد.



(ت) نادرست؛ فلزها منابع تجدیدناپذیر هستند؛ زیرا آهنک مصرف و استخراج فلز سریع‌تر از آهنک بازگشت فلز به طبیعت به شکل سنگ معدن است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: دانش * شیمی ۲ (فصل ۱)

۷۰- پاسخ: گزینه ۳



(ب) درست؛ جرم مولی ترکیب (۲) یعنی اتین (C_2H_2) برابر با $۲۶ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است. $(۲(۱۲) + ۲(۱) = ۲۶ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})$

جرم مولی ترکیب (۴) یعنی متان (CH_4) برابر با $۱۶ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است. $(۱۲ + ۴(۱) = ۱۶ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})$

جرم مولی ترکیب (۳) یعنی اتن (C_2H_4) برابر با $۲۸ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ است. $(۲(۱۲) + ۴(۱) = ۲۸ \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})$

$$\frac{۲۶ + ۱۶}{۲۸} = ۱/۵$$

ت) درست؛ درصد جرمی کربن در مولکول (۴) ← متان (CH₄):

$$\frac{1 \times 12}{16} \times 100 = 75\%$$

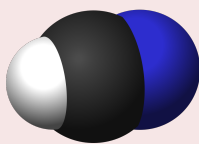
درصد جرمی کربن در اتان (C₂H₆):

$$\frac{2 \times 12}{30} \times 100 = 80\%$$

پس درصد جرمی کربن در مولکول (۴) کمتر از درصد جرمی کربن در اتان است.



الف) نادرست؛ شکل (۲) مدل گلوله و میله مولکول اتین است نه مدل فضاپرکن آن!
پ) نادرست؛ شکل (۱) می تواند مدل فضاپرکن کربن دی اکسید (CO₂) باشد.
مدل فضاپرکن هیدروژن سیانید (HCN):

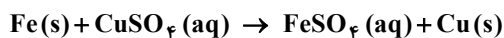


▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: استدلال * شیمی ۲ (فصل ۱)

۷۱- پاسخ: گزینه ۲

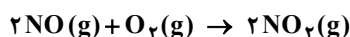


کمرنگ شدن رنگ آبی محلول، نشان دهنده مصرف یون های مس (Y) و تشکیل لایه جامدی از آن روی فلز X است. فلز X (آهن) فعال تر از فلز Y (مس) است و می تواند یون های مس را از ترکیبش در محلول خارج کند؛ بنابراین فلز مس (Y) بر روی فلز آهن (X) رسوب کرده و در نتیجه واکنش پذیری آهن نسبت به مس بیشتر است.
مثال معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



▲ مشخصات سؤال: دشوار * حیطه: کاربرد * شیمی ۲ (فصل ۱)

۷۲- پاسخ: گزینه ۱



NO با ۲ مول O₂، ۲۸ g اختلاف جرم به ازای مصرف ۱ مول O₂، ۲۸ g = ۲ × ۳۰ - ۱ × ۳۲ = ۲۸ g

برای اینکه نسبت ها مناسب واکنش باشد باید به ازای هر ۱ مول O₂، ۲ مول NO داشته باشیم که اختلاف جرم این دو مضربی از ۲۸ است. در واقع به ازای هر ۲۸ g اختلاف جرم گویی ۲ مول NO با ۱ مول O₂ واکنش داده و ۲ مول NO₂ تولید می کند.

$$? \text{ LNO}_2 : 1/4 \text{ g اختلاف جرم} \times \frac{2 \text{ mol NO}_2}{28 \text{ g اختلاف جرم}} \times \frac{22/4 \text{ LNO}_2}{1 \text{ mol NO}_2} = 2/24 \text{ LNO}_2$$

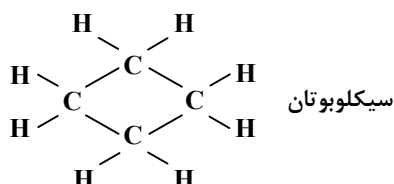
▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: دانش * شیمی ۲ (فصل ۱)

۷۳- پاسخ: گزینه ۳

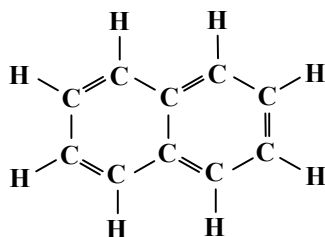


بررسی همه عبارت ها:

عبارت «اول»: درست؛ اصطلاح «جوش کاربیدی» به طور خاص به جوشکاری با استفاده از اتین (که به آن مشعل استیلن یا اتین نیز گفته می شود) اشاره دارد. در این روش گاز اتین به همراه اکسیژن سوخته شده و دمای بسیار بالایی برای ذوب فلزات فراهم می آورد.
عبارت «دوم»: نادرست؛ هیدروکربن های حلقوی می توانند سیر شده یا سیر نشده باشند. ترکیبات حلقوی سیر شده مانند سیکلوگزان، تمام پیوندهای کربن - کربن در حلقه را به صورت یگانه دارند و فاقد پیوند دوگانه یا سه گانه در حلقه هستند.



عبارت «سوم»: درست؛ نفتالن ($C_{10}H_8$) با ساختار زیر یک هیدروکربن آروماتیک است که از اتصال دو حلقه بنزن در دو اتم کربن مشترک تشکیل شده است.



عبارت «چهارم»: درست؛ بنزن که نماینده ترکیبات آروماتیک است، یک هیدروکربن سیر نشده با ساختاری حلقوی و شش ضلعی است.

۷۴- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * شیمی ۲ (فصل ۲)

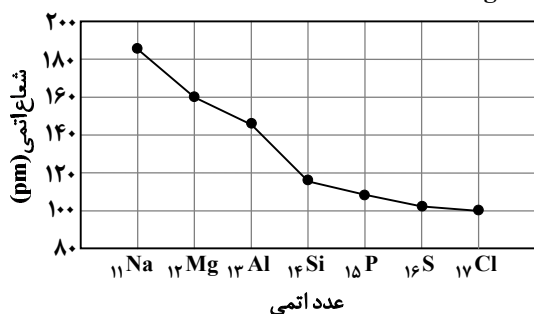


تبخیر آبی که در بدنه بیرونی ظرف سفالی نفوذ کرده، باعث خنک شدن محتویات درون یخچال صحرایی می‌شود. در فرایند تبخیر آب، یک مول آب $44/1 \text{ kJ}$ گرما می‌گیرد و به بخار آب تبدیل می‌شود.

۷۵- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: استدلال * شیمی ۲ (فصل ۱)



گزینه ۴: درست؛ طبق نمودار، اختلاف شعاع اتمی: $Na - Mg > Mg - Al > P - S > S - Cl$



گزینه ۱: Ca ۲ نسبت به Mg ۱۲ شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد و راحت‌تر الکترون از دست می‌دهد. (خصیلت فلزی و واکنش پذیری کلسیم از منیزیم بیشتر است).

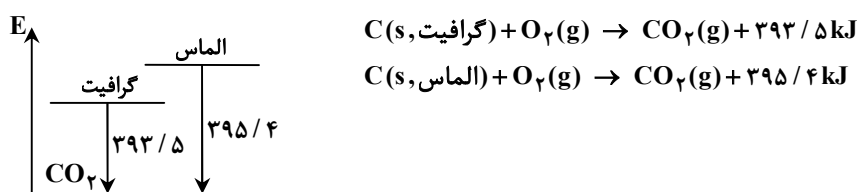
گزینه ۲: هرچه شدت نور یا آهنگ خروج گاز آزاد شده در یک واکنش بیشتر باشد، واکنش دهنده فعالیت شیمیایی بیشتری دارد.

گزینه ۳: فلزهای قلیایی خاکی در واکنش‌ها به کاتیون M^{2+} تبدیل می‌شوند.

۷۶- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: استدلال * شیمی ۲ (فصل ۲)



گرمای حاصل از سوختن یک مول الماس از یک مول گرافیت بیشتر است. با توجه به اینکه فرآورده سوختن هر دو، گاز CO_2 می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت که سطح انرژی گرافیت نسبت به الماس پایین‌تر است؛ بنابراین پایداری بیشتری دارد.





$$\frac{\text{جرم مولی}}{\text{حجم مولی}} = \frac{32 \text{ g}}{V} \Rightarrow d_{O_2} = \frac{1}{6} \frac{\text{g}}{\text{L}} = \frac{\text{mol}}{V} \Rightarrow V = 20 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

حجم مولی گازها در شرایط واکنش برابر $20 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$ است.

طبق واکنش، به ازای تولید ۳ مول گاز (۲ مول SO_2 و ۱ مول O_2) ۲ مول $CaSO_4$ مصرف می‌شود:

$$\text{خالص } CaSO_4 = 54/4 \text{ g } CaSO_4 = \frac{1 \text{ mol gas} \times 2 \text{ mol } CaSO_4}{20 \text{ L gas}} \times \frac{136 \text{ g } CaSO_4}{1 \text{ mol } CaSO_4}$$

$$\text{ناخالصی } 57 - 54/4 = 2/6 \text{ g}$$

$$\text{خالص } CaO = 22/4 \text{ g } CaO = \frac{1 \text{ mol gas} \times 2 \text{ mol } CaO}{20 \text{ L gas}} \times \frac{56 \text{ g } CaO}{1 \text{ mol } CaO}$$

$$\text{درصد خلوص } CaO = \frac{\text{جرم خالص } CaO}{\text{جرم ناخالصی} + \text{جرم خالص } CaO} \times 100 = \frac{22/4}{22/4 + 2/6} \times 100 = \frac{22/4}{25} \times 100 = 89/6\%$$



بررسی همه عبارت‌ها:

عبارت «اول»: درست؛ اگرچه پیوند دوگانه واکنش پذیری را افزایش می‌دهد، اما تعداد و موقعیت پیوندهای دوگانه و همچنین ساختار کلی مولکول، بر میزان و نوع واکنش پذیری تأثیرگذار است و لزوماً افزایش خطی نداریم.

عبارت «دوم»: نادرست؛ مولکول چربی سیرنشده، حداقل یک پیوند دوگانه کربن-کربن در زنجیره اسید چرب خود دارد، اما ممکن است پیوندهای کربن-کربن دیگر در همان مولکول، یگانه باشند.

عبارت «سوم»: نادرست؛ ترکیب‌های سیرنشده دیگر مانند آلکین‌ها که دارای پیوند سه‌گانه هستند نیز با برم واکنش داده و رنگ آن را از بین می‌برند، پس نمی‌توان یقین داشت که گاز ذکر شده حاوی آلکن است.

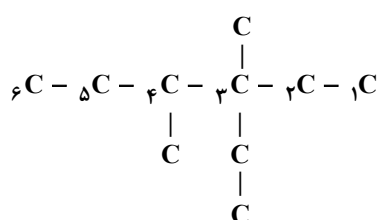
عبارت «چهارم»: درست؛ اتانول به دلیل اینکه تنها دارای پیوندهای یگانه در ساختار خود است یک ترکیب سیرشده محسوب می‌شود. در نتیجه فاقد توانایی واکنش با برم مایع است و به همین دلیل رنگ برم در حضور اتانول از بین نمی‌رود.



عامل تعیین کننده اصلی در کیفیت و قابلیت پالایش نفت خام، ترکیب هیدروکربنی آن است. توزیع هیدروکربن‌ها بر اساس طول زنجیره کربنی (و به تبع آن جرم مولی و نقطه جوش) مستقیماً بر میزان و نوع محصولات که می‌توان از آن استخراج کرد، تأثیر می‌گذارد. نفت خام با درصد بالاتر از مولکول‌های سبک‌تر (مانند بنزین و خوراک پتروشیمی) معمولاً سبک‌تر و با ارزش‌تر تلقی می‌شود؛ زیرا این محصولات متقاضی بیشتری دارند و فرایند تولیدشان از این نوع نفت خام، کارآمدتر است.

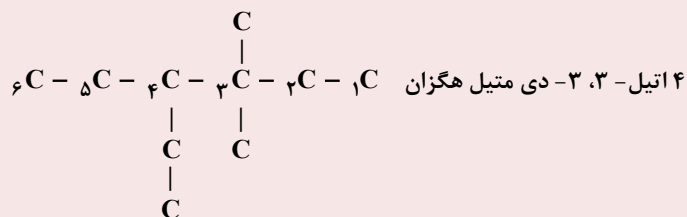


گزینه ۳: نام ۳- اتیل، ۳-، ۴- دی متیل هگزان با توجه به ساختار مقابل درست است.

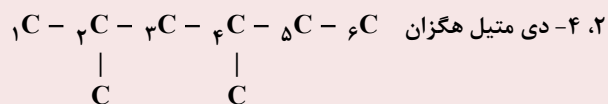


نباید سراغ اینا بری

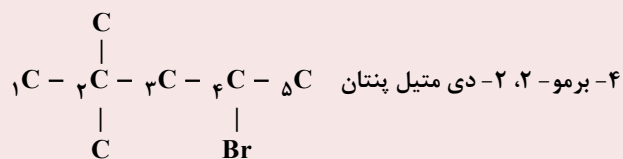
گزینه ۱: شماره گذاری درست نیست و در نوشتن نام آلکان اتیل نسبت به متیل اولویت دارد.



گزینه ۲: شماره گذاری درست نیست.



گزینه ۴: شماره گذاری درست نیست.



خوبه اینو بدونی

- در نام گذاری هیدروکربن ها، اولویت در ذکر شاخه براساس اولین حرف نام انگلیسی شاخه و ترتیب حروف الفبای انگلیسی است:
اولویت:

Bromo > Chloro > Ethyl > Fluoro > Iodo > Methyl > Propyl